ANALİZ III (A-B) QUİZ I YANIT ANAHTARI

1) $$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx}_{I} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx}_{II}$$

I. integral 2. tip has olmayan integraldir. $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ alıp, 2. tip has olmayan integraller için limit testi uygulanırsa,

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+x}} = 1 \neq 0 \text{ ve}$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ integrali yakınsak olduğundan ($p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan)

$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$ integrali yakınsaktır.

II. integral 1. tip has olmayan integraldir.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ ve $g(x)=\cos x$ denirse,

f monoton azalandır. Gerçekten $x_1, x_2 \in [1,\infty)$ için $x_1<x_2$ ise

$$\sqrt{x_1+x_1^2} < \sqrt{x_2+x_2^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1+x_1^2}} > \frac{1}{\sqrt{x_2+x_2^2}} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \text{ olur.}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+x^2}} = 0$$

ve $f'(x) = -\frac{1+2x}{2(x+x^2)^{3/2}}$; $\forall t\geq 1$ için $[1,t]$ aralığı üzerinde integrallenebilirdir.

Yine $g(x)=\cos x$ sürekli ve

$$|G(t)| = \left|\int_1^t g(x)\,dx\right| = \left|\int_1^t \cos x\,dx\right| = |\sin t - \sin 1| \leq 2$$

olduğundan $\int_1^t g(x)\,dx$ sınırlıdır.

O halde Dirichlet testinden dolayı

$$\int_1^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$$ integrali yakınsaktır.

I ve II integralleri yakınsak olduğundan $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$ integrali

de yakınsaktır.

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

$a_n = \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ basit kesirlere ayrılırsa

$a_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ olur.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{8}\left[\left(1-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{25}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{25}}-\cancel{\frac{1}{49}}\right)\cancel{+}\dots\cancel{+}\left(\cancel{\frac{1}{(2n-1)^2}}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}$ olduğundan seri yakınsak

olup, toplamı da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8}$ bulunur.